Intégrales simples.
Mode d'emploi.

Les intégrales simples :

L'intégrale définie :

- ***L'intégrale de Riemann :*** Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, l'intégrale de f sur $[a,b]$ est $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=n} hf(a+kh)$ où $h=\dfrac{b-a}{n}$.
  L'existence de la limite est assurée par la continuité de f.
  La dénomination de la variable d'intégration x, t ou autre n'a aucune influence sur la valeur de l'intégrale.
  Bernhard Riemann (1826-1866) était un mathématicien allemand.

- ***Quelques propriétés :***
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$
  - $\displaystyle\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
  - $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ pour toute constante λ
  - $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
  - Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$ (Attention à la condition $a\leqslant b$)
  - Si pour tout $x\in[a,b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (Attention à la condition $a\leqslant b$)

Le calcul d'intégrales définies :

Les primitives :

- ***Lien avec l'intégrale :***
  Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b)-F(a)$

- ***Fonction définie par une intégrale :*** La fonction $x\longmapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
  On note souvent $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de f.

- ***Primitives usuelles :***

f	F
x^n, (n constant, $n \neq -1$)	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\tan x$	$\ln \left\lvert \dfrac{1}{\cos x} \right\rvert$
e^x	e^x
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

- ***Formules classiques d'intégration :***
  - Une primitive de $f = u'u^n$ (n constant, $n \neq -1$) est $F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
  - Une primitive de $f = \dfrac{u'}{u}$ est $F = \ln|u|$
  - Une primitive de $f = u'\mathrm{e}^u$ est $F = \mathrm{e}^u$
  - Une primitive de $f = u'v(u)$ est $F = V(u)$ où V désigne une primitive de v.

L'intégration par parties :

- ***La formule :*** $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$
- ***Le choix de la fonction v à dériver :***
  - certaines fonctions "disparaissent" par dérivation : ln, arctan, arcsin, ..., etc
  - les puissances diminuent par dérivation
  - une "double" dérivation des fonctions circulaires permet de retrouver celles-ci

Le changement de variable :

- ***La formule :*** Si $x = \varphi(t)$ où φ est une fonction bijective sur $[a, b]$, c'est à dire telle que $x = \varphi(t) \Leftrightarrow t = \varphi^{-1}(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\mathrm{d}t$
- ***La pratique :***
  - Une fois choisie la fonction φ, on calcule $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$
  - On déterminer les nouvelle bornes : $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = \varphi^{-1}(a) \\ x = b \Rightarrow t = \varphi^{-1}(b) \end{cases}$
  - On remplace alors dans l'intégrale x par $\varphi(t)$, a et b par les nouvelles bornes et $\mathrm{d}x$ par $\varphi'(t)\mathrm{d}t$

- ***Le choix du changement :***
  - La règle générale est intuitive : on pose $x =$ la partie "gênante"
  - Pour les intégrales en $\sqrt{1-x^2}$, on peut poser $x = \sin t$
  - Pour les intégrales en $\sqrt{1+x^2}$, on peut poser $x = \sinh t$
  - Pour les intégrales formées à partir de fonctions circulaires, on peut poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. L'intérêt de ce changement est donnée par les formules $\sin x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\cos x = \dfrac{2t}{1+t^2}$

Quelques cas particuliers :

- ***Les intégrales de fractions rationnelles :*** Il est nécessaire de les décomposer en éléments simples.
- ***Les intégrales de fonctions circulaires :*** Il peut être nécessaire de linéariser certaines expressions trigonométriques.

Applications du calcul intégral :

La valeur moyenne d'une fonction :

La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

La valeur efficace :

La valeur efficace de f sur $[a,b]$ est égale à $\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b (f(t))^2\,\mathrm{d}t}$

Le calcul d'aire :

L'aire de la partie du plan délimitée par les courbes de deux fonctions f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$ est égale à $\displaystyle\int_a^b |f(t) - g(t)|\,\mathrm{d}t$

Le calcul de volume :

- ***Solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses*** x ***:***
  Le volume du solide engendré par rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan délimité par la courbe d'une fonction f et les droites $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$ est donné par $\displaystyle\int_a^b \pi\,(f(t))^2\,\mathrm{d}t$
- ***Solide engendré par rotation autour de l'axe des ordonnées*** y ***:***
  Le volume du solide engendré par rotation autour de l'axe des ordonnées de la partie du plan délimité par la courbe d'une fonction f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$ est donné par $\displaystyle\int_a^b \pi t f(t)\mathrm{d}t$